



UNIVERSITY OF NORTH BENGAL
B.Sc. Programme 6th Semester Examination, 2021

SEC4 (P2)-MATHEMATICS

Full Marks: 60

ASSIGNMENT

*The figures in the margin indicate full marks.
All symbols are of usual significance.*

The question paper contains SEC4A and SEC4B. Candidates are required to answer any *one* from the *two* Courses and they should mention it clearly on the Answer Book.

SEC4A

Graph Theory

GROUP-A / বিভাগ-ক

Answer all questions

2×5 = 10

নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও

1. (a) Can a simple graph with 7 vertices be isomorphic to its complement?
7 টি শীর্ষবিন্দু যুক্ত সরল গ্রাফ (simple graph) কি নিজের পূরক (complement)-এর সহিত isomorphic হবে ?
- (b) Explain why there does not exist a tree having degree sequence 1, 1, 1, 1, 4, 4.
ব্যাখ্যা করঃ 1, 1, 1, 1, 4, 4 ডিগ্রী ক্রম (degree sequence) যুক্ত কোন tree-এর অস্তিত্ব নেই।
- (c) Let G be a simple graph of order n such that $\deg(u) \geq (n-1)/2$ for every vertex u of G . Prove that G is connected.
ধর G একটি n অর্ডারের সরল গ্রাফ (simple graph) যেখানে $\deg(u) \geq (n-1)/2$, প্রতিটি u শীর্ষবিন্দুর জন্য। দেখাও যে G একটি সংযুক্ত গ্রাফ (connected graph)।
- (d) Show that a graph with 5 vertices and with no loops or parallel edges which has at least 8 edges is Hamiltonian.
দেখাও যে কোন গ্রাফ, যার 5টি শীর্ষবিন্দু এবং কমপক্ষে 8টি বাহু (সমান্তরাল বাহু বা লুপ (loop) নেই) Hamiltonian হবে।
- (e) Draw the graph G represented by the given adjacency matrix,
একটি গ্রাফ অঙ্কন কর যেখানে প্রদত্ত adjacency ম্যাট্রিক্স হল

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

GROUP-B / বিভাগ-খ

Answer all questions

12×3 = 36

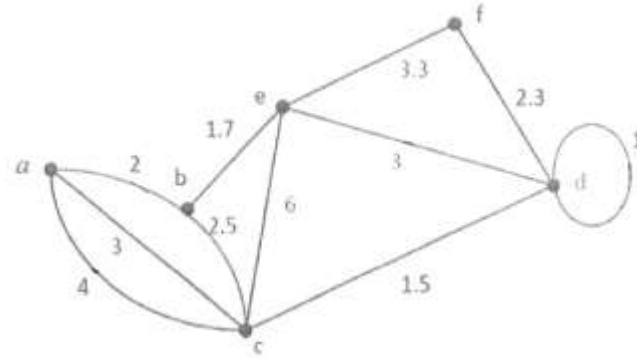
নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও

2. (a) Prove that a simple graph G with n vertices and m components cannot have more than $\frac{1}{2}(n-m)(n-m+1)$ edges. 4

দেখাও যে n সংখ্যক শীর্ষবিন্দু এবং m সংখ্যক উপাংশযুক্ত (components) কোন সরল গ্রাফের বাহুর সংখ্যা $\frac{1}{2}(n-m)(n-m+1)$ -এর বেশি হতে পারে না।

- (b) Apply Dijkstra's Algorithm to determine a shortest path from a to f in the following graph: 6

Dijkstra's algorithm-এর সাহায্যে নিম্নলিখিত গ্রাফে উপস্থিত শীর্ষবিন্দু a হইতে f বিন্দুর মধ্যবর্তী সবচেয়ে কম দূরত্বের পথটি (shortest path) নির্ণয় করঃ



- (c) Prove that a bipartite graph $K_{p,q}$ of order $n \geq 3$ is Hamiltonian if and only if $p = q$. 2

দেখাও যে $n \geq 3$ অর্ডারের একটি bipartite গ্রাফ $K_{p,q}$ Hamiltonian হবে যদি এবং শুধু যদি $p = q$ হয়।

3. (a) Show that / প্রমাণ করঃ 4

- (i) $K_{m,n}$ is a tree if and only if $m = 1$ or $n = 1$.

$K_{m,n}$ একটি tree হবে $\Leftrightarrow m = 1$ অথবা $n = 1$

- (ii) K_n is a tree if and only if $n = 1$ or 2 .

K_n একটি tree হবে $\Leftrightarrow n = 1$ অথবা $n = 2$

- (b) Let T_1 be a tree of order n and size 10 and T_2 be another tree of order $4n - 1$. Find the size of T_2 . 4

ধর T_1 একটি tree যার অর্ডার n এবং আকার (size) 10 এবং T_2 অপর একটি tree যার অর্ডার $4n - 1$ তাহলে T_2 tree-এর আকার (size) নির্ণয় কর।

- (c) If a simple regular graph has n vertices and 24 edges, find all possible values of n . 3

যদি একটি সরল regular গ্রাফের n সংখ্যক শীর্ষবিন্দু এবং 24টি বাহু থাকে তবে n -এর সম্ভাব্য মানগুলি নির্ণয় কর।

- (d) Prove that the size of K_n is a multiple of n if n is odd. 1

প্রমাণ কর যদি n একটি বিজোড় সংখ্যা হয় তবে K_n -এর আকার (size) n -এর গুণিতক হবে।

4. (a) Give an example of a graph that has neither a Hamiltonian cycle nor a Euler circuit. 2

এমন একটি গ্রাফের উদাহরণ দাও যার মধ্যে Hamiltonian চক্র (cycle) এবং Euler বর্তনী (circuit) কোনটাই থাকবে না।

- (b) The adjacency matrix A_G and the incidence matrix I_H of two graphs G and H respectively each with 5 vertices are shown below: 5

5টি শীর্ষবিন্দু যুক্ত দুটি পৃথক গ্রাফ G এবং H -এর যথাক্রমে adjacency মেট্রিক্স A_G এবং incidence মেট্রিক্স I_H নিম্নে প্রদত্তঃ

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Check whether G and H are isomorphic or not.

তাহলে G এবং H isomorphic হবে কিনা যাচাই কর।

- (c) Let G be a self-complementary graph of order n . Show that either $n \equiv 0 \pmod{4}$ or $n \equiv 1 \pmod{4}$. 3

ধর G একটি n অর্ডারের self-complementary গ্রাফ। দেখাও যে $n \equiv 0 \pmod{4}$ অথবা $n \equiv 1 \pmod{4}$ হবে।

- (d) Let G be a graph of order $n (\geq 6)$. Show that either G or \bar{G} contains a cycle of length 3. 2

ধর G একটি $n (\geq 6)$ অর্ডারের গ্রাফ। দেখাও যে G নিজে অথবা \bar{G} -এর মধ্যে 3 দৈর্ঘ্যের চক্র (cycle) থাকবে।

GROUP-C / বিভাগ-গ

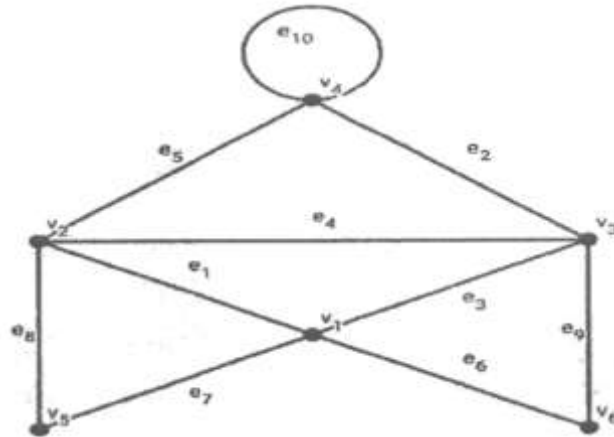
Answer all questions

7×2 = 14

নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও

5. (a) Check that the following graph is Eulerian or not. If yes then find an Eulerian circuit in it. 5

নিম্নলিখিত গ্রাফটি Eulerian হবে কিনা যাচাই কর। যদি উত্তরটি হ্যাঁ হয় তাহলে ইহাতে একটি Eulerian চক্র (cycle) খুঁজে বের কর।



(b) Prove that the complement of a disconnected graph is connected. 2

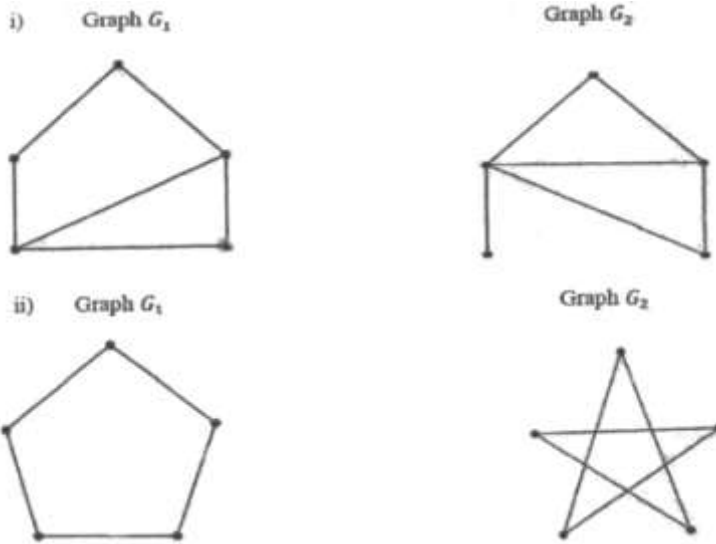
দেখাও যে কোন একটি বিচ্ছিন্ন গ্রাফ (disconnected graph)-এর পূরক (complement) একটি সংযুক্ত (connected) গ্রাফ হবে।

6. (a) Does there exists a graph with 20 edges if each vertex is of degree 3? Justify your answer. 2

যদি প্রতিটি শীর্ষবিন্দুর ডিগ্রী 3 হয় তাহলে 20টি বাহুবিশিষ্ট এমন কোন গ্রাফের অস্তিত্ব পাওয়া যাবে কি? ইহার উত্তরের যথাযথ যুক্তি দাও।

(b) For the graphs G_1 and G_2 , determine whether G_1 is isomorphic to G_2 . Justify your answer. 5

নিম্নলিখিত G_1 এবং G_2 গ্রাফদ্বয় isomorphic কিনা উপযুক্ত যুক্তিসহ যাচাই কর।



SEC4B

Boolean Algebra and Automata Theory

GROUP-A / বিভাগ-ক

Answer all questions

2×5 = 10

নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও

1. (a) Construct an FA equivalent to the regular expression $\alpha = (aa + b)^*(aba)^*bab$.

$\alpha = (aa + b)^*(aba)^*bab$ এই স্বাভাবিক রাশি (regular expression)-টির সমতুল্য একটি FA চিত্র অঙ্কন কর।

(b) Show that the power-set lattice $P(U)$ is a distributive lattice for any set U .

যে কোন একটি সেট U এর জন্য দেখাও যে U সেটের power set lattice $P(U)$ -টি একটি distributive lattice।

(c) Write down the Block diagram of NOR-Gate.

NOR-গেটের Block diagram-টি উল্লেখ কর।

(d) Show that $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ is not regular.

দেখাও যে $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ স্বাভাবিক (regular) নয়।

(e) Give an example of an infinite lattice L with a finite length.

নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যযুক্ত একটি অসীম lattice L -এর উদাহরণ দাও।

GROUP-B / বিভাগ-খ

Answer all questions

12×3 = 36

নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও

2. (a) Convert NFA to its equivalent DFA:

4

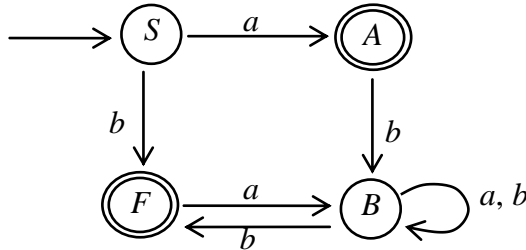
NFA হইতে সমতুল্য DFA-এ রূপান্তরিত করঃ

Current State	Input symbols	
	a	b
$\rightarrow q_0$	q_2	q_0
q_1	q_2	q_0, q_1
q_2	q_1, q_f	q_0
q_f	—	—

(b) Find the corresponding regular expression for the FA given in the following figure:

4

নিম্নলিখিত ছবিতে প্রদত্ত FA-এর regular expression-টি নির্ণয় করঃ



(c) Find the language generated by the following grammars:

4

নিম্নলিখিত grammar-গুলি দ্বারা গঠিত ভাষাগুলি সন্ধান করঃ

(i) $S \rightarrow aSb \mid aXb$ $X \rightarrow bX \mid b$

(ii) $S \rightarrow aA \mid bS \mid a \mid b$ $A \rightarrow bA \mid bS \mid b$

3. (a) Let a and b be two elements in a lattice (L, \leq) . Show that $a \wedge b = b$ if and only if $a \vee b = a$.

2

ধর একটি lattice (L, \leq) -এর দুটি উপাদান a এবং b | প্রমাণ কর যে $a \wedge b = b \Leftrightarrow a \vee b = a$ ।

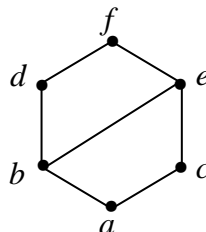
(b) Find (i) the complements of the vertices b and c in the given lattice L .

2

প্রদত্ত lattice L -এর b এবং c শীর্ষবিন্দুর complement-টি নির্ণয় কর।

(ii) the dual of L .

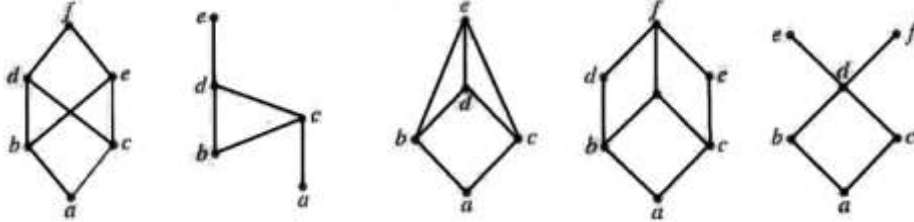
L -এর dual নির্ণয় কর।



- (c) Consider a set $A := \{2, 3, 4, 8, 12, 36, 48\}$ and let $R := \{(a, b) \in A \times A : a \text{ is a divisor of } b\}$ be a relation on A . Draw the Hasse diagram and check whether (A, R) forms a lattice or not. 3

ধর $A := \{2, 3, 4, 8, 12, 36, 48\}$ একটি সেট এবং $R = \{(a, b) \mid a \text{ হল } b\text{-এর একটি ভাজক}\}$, A সেটটির উপর সম্পর্ক। Hasse লেখচিত্রটি অঙ্কন কর এবং (A, R) একটি lattice গঠন করবে কিনা যাচাই কর।

- (d) Which of the following Hasse diagrams represent a lattice? Justify your answer. 5
নিম্নলিখিত কোন কোন Hasse diagram-টি lattice হবে বুঝিয়ে বল।



4. (a) Draw the circuit that represents the following Boolean function. Find also an equivalent simpler circuit. 7

নিম্নলিখিত Boolean অপেক্ষকটির বর্তনী (circuit)-টি অঙ্কন কর এবং ইহার সমতুল্য সরল বর্তনী (simpler circuit)-টি অঙ্কনসহ উল্লেখ করঃ

x	y	z	$f(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

- (b) Verify whether the following Boolean expressions α and β are equal or not. 2

নিম্নলিখিত Boolean রাশিদ্বয় α এবং β সমান কিনা যাচাই করঃ

$$\alpha = (x + y)(x + z) x'y' , \beta = x + yz$$

- (c) Convert the following Boolean expression from DNF to CNF: 3

নিম্নলিখিত Boolean রাশিটির DNF ফর্মটি CNF-এ রূপান্তরিত করঃ

$$abc + ab'c + ab'c'$$

GROUP-C / বিভাগ-গ

Answer all questions

7×2 = 14

নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও

5. (a) Use Karnaugh map to find a minimal sum for the following Boolean expression: 4

Karnaugh map-এর সাহায্যে নিম্নলিখিত Boolean রাশিটির minimal sum নির্ণয় করঃ

$$xyz + x'yz + x'y'z + xz$$

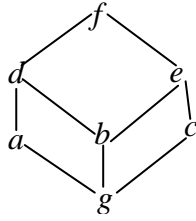
- (b) Let the union S of sets $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots\}$ be ordered by: 3

$S = \{A; B; C\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, b_3, \dots, c_1, c_2, c_3, \dots\}$. Show that S is not isomorphic to \mathbb{N} with usual order.

$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots\}$ সেট তিনটির Union সেটটির ক্রম (order) $S = \{A; B; C\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, b_3, \dots, c_1, c_2, c_3, \dots\}$ । দেখাও যে সাধারণ ক্রম (usual order) এর সাপেক্ষে S সেটটি \mathbb{N} এর সাথে isomorphic হবে না।

6. (a) Consider a partially ordered set L in the following fig. 5

ধর L একটি আংশিক ক্রম সেট (partially ordered set) যা নিম্নলিখিত ছবিতে বর্ণিত।



- (i) Show that L forms a lattice.

দেখাও যে L একটি lattice গঠন করে।

- (ii) Is L distributive?

এই L lattice-টি distributive কিনা যাচাই কর।

- (b) Draw the logic circuit of the Boolean expression $A + B'C + A'B'C + A'BC'$. 2

Boolean রাশি $A + B'C + A'B'C + A'BC'$ -এর logical circuit নির্ণয় কর।

—x—